Fórmulas Integrais de Cauchy

Teorema (Fórmula Integral de Cauchy): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa na região D_f e seja γ um caminho fechado homotópico a um ponto em D_f. Se $z_0 \in D_f$ é um ponto que não pertence à curva percorrida por γ tem-se

$$f(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Em particular, se γ percorre uma curva de Jordan uma vez no sentido positivo e z_0 está no lado de dentro da curva, tem-se

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Teorema (Fórmulas Integrais de Cauchy para Derivadas): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa na região D_f, então f é infinitamente diferenciável em D_f. Seja γ um caminho fechado homotópico a um ponto em D_f e $z_0 \in D_f$ um ponto que não pertence à curva percorrida por γ, tem-se

$$\frac{d^k f}{dz^k}(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Em particular, se γ percorre uma curva de Jordan uma vez no sentido positivo e z_0 está no lado de dentro da curva, tem-se

$$\frac{d^k f}{dz^k}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Corolário: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função definida na região D_f. Se f tem primitiva em D_f então f é holomorfa em D_f.

Teorema (Morera): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contínua no domínio D_f. Se, para qualquer caminho fechado γ em D_f, se tem

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

então f é holomorfa em D_f.

Teorema (Liouville): Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inteira e limitada, ou seja, tal que existe um $M > 0$ para o qual $|f(z)| \leq M$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. Então f é constante.

Teorema Fundamental da Álgebra: Seja

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, um polinómio de grau n. Então existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P_n(z_0) = 0$.

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e $f : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ de classe $C^2(\Omega)$. Então, diz-se que f é **harmónica** se

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função holomorfa na região D_f. Então u e v são funções reais harmónicas em D_f, ou seja, f é harmónica:

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = 0,$$

para todo o $z = x + iy \in D_f$.

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função harmónica. Então, diz-se que $v : \Omega \to \mathbb{R}$ é **conjugado harmónico de** u em Ω se $f = u + iv$ é holomorfa em $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Teorema: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma região simplesmente conexa. Então, se $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ é harmónica em Ω, existe conjugado harmónico nesse conjunto, que é único a menos duma constante real aditiva. Em particular, toda a função harmónica é infinitamente diferenciável.

Séries

Seja $\{z_j\}$ uma sucessão complexa. Quer-se somar os infinitos termos da sucessão

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$$

Definição: Dada uma sucessão complexa $\{z_j\}$ chama-se **sucessão das somas parciais** à sucessão

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} z_j = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n.$$

Diz-se que a série $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ **converge** se converge a sucessão das somas parciais. Nesse caso chama-se **soma da série** ao limites da sucessão das somas parciais,

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} z_j.$$

Proposição: Uma série da forma

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} r^j,$$

diz-se uma **série geométrica de razão** $r \in \mathbb{C}$. Diverge se $|r| \geq 1$ e converge para $|r| < 1$ com soma

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} r^j = r^{j_0} \frac{1}{1-r}.$$

Proposição: Se uma série $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge então, necessariamente, o termo geral é um infinitésimo, ou seja $\lim_{j\to\infty} z_j = 0$. Equivalentemente, se $z_j \not\to 0$ então a correspondente série diverge.

Proposição: Se $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} w_j$ são séries convergentes, então também o são as séries

- $\sum_{j=1}^{\infty}(z_j + w_j)$ e a soma é $\sum_{j=1}^{\infty} z_j + \sum_{j=1}^{\infty} w_j$.
- $\sum_{j=1}^{\infty} cz_j$ para qualquer $c \in \mathbb{C}$ e a soma é $c\sum_{j=1}^{\infty} z_j$.

Proposição: Uma série $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge se e só se a sucessão das somas parciais é uma sucessão de Cauchy

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} : n,m > N \Rightarrow |S_n - S_m| = \left|\sum_{j=m+1}^{n} z_j\right| < \delta.$$

Corolário: A convergência duma série $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ não se altera por modificações num número finito de termos (mas, no caso de convergir, o valor da soma pode alterar-se).

Corolário: Se a série $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|$ converge, então $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge.

Definição:

- Se a série $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|$ converge diz-se que $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ **converge absolutamente** ou que é **absolutamente convergente**.
- Se a série $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|$ diverge mas $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge, diz-se que **converge simplesmente** ou que é **simplesmente convergente**.

Séries de Termos Positivos

Revisão dos Principais Critérios de Convergência:

- (Critério Geral de Comparação) Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e a série $\sum_n^\infty b_n$ converge então $\sum_n^\infty a_n$ converge. Equivalentemente, se $\sum_n^\infty a_n$ diverge então $\sum_n^\infty b_n$ diverge.
- Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$, com $0 < L < \infty$, então as séries $\sum_n^\infty a_n$ e $\sum_n^\infty b_n$ têm a mesma natureza, ou seja, ou são ambas convergentes, ou ambas divergentes.
- A série $\sum_n^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.
- (Critério da Raíz/Critério de Cauchy) Se $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$ então a série $\sum_n^\infty a_n$ converge. E se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ a série diverge. Analogamente se existir o limite $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e este for < 1 ou > 1. O critério de Cauchy é inconclusivo se $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$.
- (Critério da Razão/Critério de D'Alembert) Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$ então a série $\sum_n^\infty a_n$ converge. E se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ a série diverge. Analogamente se existir o limite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e este for < 1 ou > 1. O critério de D'Alembert é inconclusivo se $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.